2021 年 度
大 学 院 入 学 試 験 問 題
数 学 3 （主に複素関数論）
問題番号 M3
解答時間 40 分

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，問題文を見ないこと。
2. 解答用紙 6 枚および下書用紙 2 枚を使用すること。
3. 解答用紙および下書用紙の裏面の使用は禁止する。
4. すべての解答用紙および下書用紙の上方の指定された箇所に，受験番号を忘れずに記入すること。
5. 日本語または英語で解答すること。
6. 解答は解答用紙の実線の枠内に記入すること。
7. 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
8. 日本語の問題文は 3-4 ページ，英語の問題文は 5-6 ページに書かれている。
9. 問題文のスクロール，拡大および縮小はしてよい。キーボード操作は禁止する。

・解答には結果だけでなく導出過程も含めること。

・ネットワークトラブルが生じた場合でも解答を続けること。

2021

The Graduate School Entrance Examination

Mathematics 3 (Primarily from the field of Complex Function Theory)

Problem Number M3

Answer Time 40 minutes

GENERAL INSTRUCTIONS

1. Do not look at the Problems until the start of the examination has been announced.
2. Use 6 Answer Sheets and 2 Draft Sheets.
3. Do not use the back faces of the Answer Sheets or the Draft Sheets.
4. Fill in your examinee number in the designated places at the top of all the Answer Sheets and the Draft Sheets.
5. Answers must be written in Japanese or English.
6. Answers must be marked within the solid frame on the Answer Sheets.
7. Any Answer Sheet with marks or symbols irrelevant to your answers is considered to be invalid.
8. The Problems are described in Japanese on pages 3-4 and in English on pages 5-6.
9. Scrolling, expansion and reduction of the Problems are permitted. Keyboard operation is prohibited.

• Show the derivation processes as well as the results.

• Continue the answer even if network trouble occurs.

数学 3 （主に複素関数論）

問 I, II, III のすべてに答えよ。以下では z を複素数，i を虚数単位，e を自然対数の底とし，$|z|$ は z の絶対値を表す。

I.　複素関数 $M(z) = \dfrac{mz}{mz - z + 1}$ に関する以下の問いに答えよ。ただし，m は，$|m| = 1$ かつ $m \neq 1$ である複素数とする。

1. $M(z) = z$ となるような $M(z)$ の不動点をすべて求めよ。
2. $z = 0$ での $M(z)$ の微分値を m を使って表せ。
3. 複素 z 平面上の円 $\left|z - \dfrac{1-i}{2}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ が $M(z)$ によって実軸に写されるような m を求めよ。

II.　複素関数 $J(z) = e^{-i\alpha}z + e^{i\alpha}z^{-1}$ の値の虚部が正となるような z の条件を求め，複素 z 平面上に図示せよ。ただし，α は実数であり $0 < \alpha < \pi/2$ とする。

次のページに続く。

III.　定積分 $I = \int_0^\infty \frac{x^\beta}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$ を計算するために，複素関数 $f(z) = \frac{z^\beta}{(z^2+1)^2}$ についての線積分を複素平面上で考える。ただし，β は実数であり $0 < \beta < 1$ とする。半円弧と直線を組み合わせた閉じた積分路 $C = C_1 + C_R + C_2 + C_r$ $(0 < r < 1 < R)$ を図 3.1 のように定義する。以下の問いに答えよ。

1.　留数定理を用いて線積分 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$ を計算せよ。
2.　$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z$ を定積分 $\int_r^R \frac{x^\beta}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$ を用いて表せ。
3.　$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z$ を求めよ。
4.　$\lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)\mathrm{d}z$ を求めよ。
5.　以上の結果を用いて，定積分 I を計算せよ。

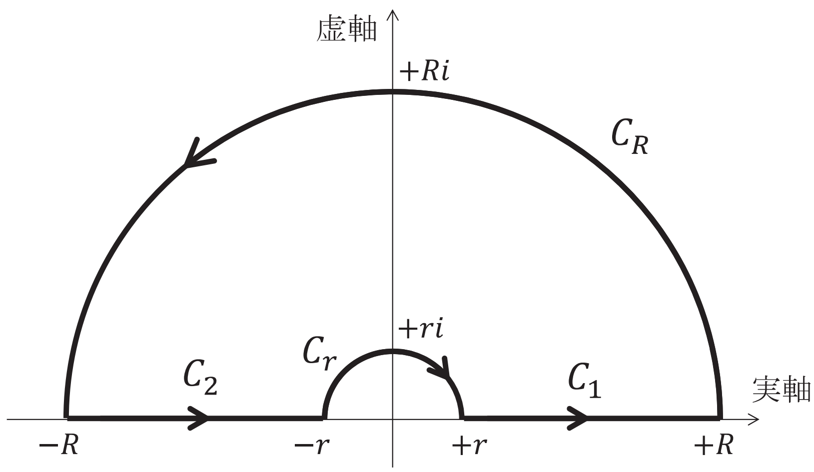

図 3.1

Mathematics 3 (Primarily from the field of Complex Function Theory)

Answer all Questions I, II and III. In the following, z denotes a complex number, i the imaginary unit, e the base of the natural logarithm, and $|z|$ the absolute value of z.

I. Answer the following questions on the complex function $M(z) = \dfrac{mz}{mz - z + 1}$. Here, m is a complex number such that $|m| = 1$ and $m \neq 1$.

1. Find all fixed points of $M(z)$ which satisfy $M(z) = z$.
2. Express the derivative of $M(z)$ at $z = 0$ by using m.
3. Find m for which the circle $\left|z - \dfrac{1-i}{2}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ on the complex z plane is mapped onto the real axis through $M(z)$.

II. Deduce the conditions for z and, on the complex z plane, draw the area of z in which the imaginary part of the complex function $J(z) = e^{-i\alpha}z + e^{i\alpha}z^{-1}$ is positive. Here, α is a real number and $0 < \alpha < \pi/2$.

Continued on the next page.

III. To calculate the definite integral $I = \int_0^{\infty} \frac{x^\beta}{(x^2+1)^2} \mathrm{d}x$, consider the line integral of the complex function $f(z) = \frac{z^\beta}{(z^2+1)^2}$ on the complex plane. Here, β is a real number and $0 < \beta < 1$. The closed integration path $C = C_1 + C_R + C_2 + C_r$ $(0 < r < 1 < R)$ is defined with semicircles and line segments as shown in Figure 3.1. Answer the following questions.

1. Using the residue theorem, calculate the line integral $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$.
2. Express $\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z$ with the definite integral $\int_r^R \frac{x^\beta}{(x^2+1)^2} \mathrm{d}x$.
3. Obtain $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z$.
4. Obtain $\lim_{r\to 0} \int_{C_r} f(z)\mathrm{d}z$.
5. Using the previous results, calculate the definite integral I .

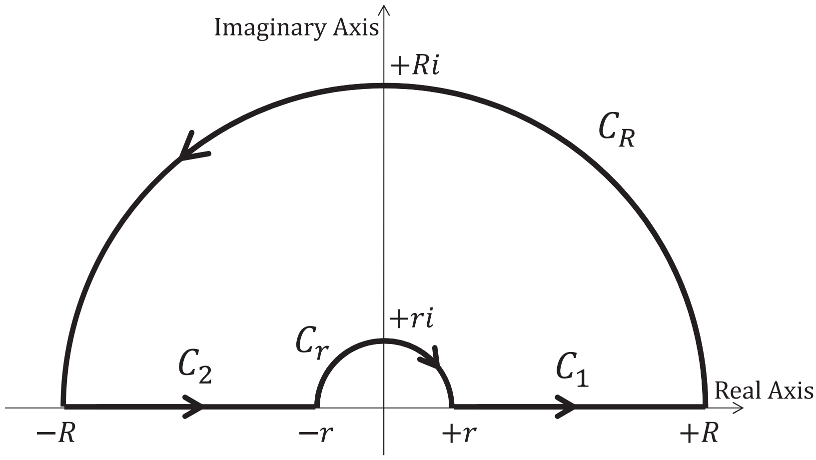

Figure 3.1