2021 年 度
大 学 院 入 学 試 験 問 題
数 学 ２ （主に線形代数）
問題番号 M2
解答時間 40 分

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，問題文を見ないこと。
2. 解答用紙 6 枚および下書用紙 2 枚を使用すること。
3. 解答用紙および下書用紙の裏面の使用は禁止する。
4. すべての解答用紙および下書用紙の上方の指定された箇所に，受験番号を忘れずに記入すること。
5. 日本語または英語で解答すること。
6. 解答は解答用紙の実線の枠内に記入すること。
7. 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
8. 日本語の問題文は 3-4 ページ，英語の問題文は 5-6 ページに書かれている。
9. 問題文のスクロール，拡大および縮小はしてよい。キーボード操作は禁止する。

・解答には結果だけでなく導出過程も含めること。

・ネットワークトラブルが生じた場合でも解答を続けること。

2021
The Graduate School Entrance Examination
Mathematics 2 (Primarily from the field of Linear Algebra)
Problem Number M2
Answer Time 40 minutes

GENERAL INSTRUCTIONS

1. Do not look at the Problems until the start of the examination has been announced.

2. Use 6 Answer Sheets and 2 Draft Sheets.

3. Do not use the back faces of the Answer Sheets or the Draft Sheets.

4. Fill in your examinee number in the designated places at the top of all the Answer Sheets and the Draft Sheets.

5. Answers must be written in Japanese or English.

6. Answers must be marked within the solid frame on the Answer Sheets.

7. Any Answer Sheet with marks or symbols irrelevant to your answers is considered to be invalid.

8. The Problems are described in Japanese on pages 3-4 and in English on pages 5-6.

9. Scrolling, expansion and reduction of the Problems are permitted. Keyboard operation is prohibited.

• Show the derivation processes as well as the results.

• Continue the answer even if network trouble occurs.

数学 2 （主に線形代数）

問 I，II，III のすべてに答えよ。

I.　次の行列 $\boldsymbol{A}$ に関する以下の問いに答えよ。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

以下で，$\boldsymbol{I}$ は 3 行 3 列の単位行列，$\boldsymbol{O}$ は 3 行 3 列の零行列であり，n は 0 以上の整数，t は実数とする。

1.　$\boldsymbol{A}$ の固有値をすべて求めよ。

2.　$\boldsymbol{A}$ がみたす次の式

$$\boldsymbol{A}^3 + a\boldsymbol{A}^2 + b\boldsymbol{A} + c\boldsymbol{I} = \boldsymbol{O} \tag{2}$$

の係数 a，b，c を求めよ。

3.　$\boldsymbol{A}^{2n+1}$ を求めよ。

4.　式(2)の関係があるため，次の式が成り立つ。

$$\exp(t\boldsymbol{A}) = p\boldsymbol{A}^2 + q\boldsymbol{A} + r\boldsymbol{I} \tag{3}$$

係数 p，q，r を，t を用いて虚数単位を含まない形で表せ。

次のページに続く。

II.　図 2.1 のように 2 つの状態 A，B を確率的に遷移する離散時間のシステムを考える。単位時間あたりに状態 A から B に遷移する確率は α，状態 B から A に遷移する確率は β である。ただし，$0 < \alpha < 1$，$0 < \beta < 1$ とする。また，変数 n および k は離散的な時刻を表し，0 以上の整数とする。

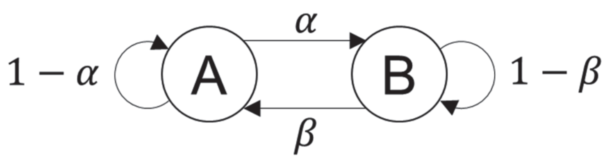

図 2.1

以下の問いに答えよ。

1. 時刻 n に状態 A である確率を $P_{\mathrm{A}}(n)$，時刻 n に状態 B である確率を $P_{\mathrm{B}}(n)$，$\boldsymbol{P}(n) = \begin{pmatrix} P_{\mathrm{A}}(n) \\ P_{\mathrm{B}}(n) \end{pmatrix}$ とする。行列 $\boldsymbol{M}$ を用いて，$\boldsymbol{P}(n+1) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{P}(n)$ と書くとき，$\boldsymbol{M}$ を α，β を用いて表せ。

2. 行列 $\boldsymbol{M}$ のすべての固有値と対応する固有ベクトルをそれぞれ求めよ。

3. 十分長い時間の後，状態 A である確率と状態 B である確率は一定値に収束する。それぞれの値を求めよ。

4. $R_{\mathrm{A}}(n) = P_{\mathrm{A}}(n) - \lim_{k\to\infty} P_{\mathrm{A}}(k)$ とする。$R_{\mathrm{A}}(n+1)$ を $R_{\mathrm{A}}(n)$ を用いて表せ。

III.　ベクトル空間 V において，ベクトル $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，… ，$\boldsymbol{a}_m$ が 1 次独立であるとする。ただし，m は 3 以上の整数とする。このとき，$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$，… ，$\boldsymbol{a}_{m-1} + \boldsymbol{a}_m$，$\boldsymbol{a}_m + \boldsymbol{a}_1$ が 1 次独立となるために，m が満たすべき条件を示せ。

Mathematics 2 (Primarily from the field of Linear Algebra)

Answer all Questions I, II and III.

I. Answer the following questions concerning the matrix $\boldsymbol{A}$ given by

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

In the following, $\boldsymbol{I}$ is the 3×3 identity matrix, $\boldsymbol{O}$ is the 3×3 zero matrix, n is an integer greater than or equal to 0 and t is a real number.

1. Obtain all eigenvalues of the matrix $\boldsymbol{A}$.
2. Find coefficients a, b and c of the following equation satisfied by $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}^3 + a\boldsymbol{A}^2 + b\boldsymbol{A} + c\boldsymbol{I} = \boldsymbol{O}\,. \tag{2}$$

3. Obtain $\boldsymbol{A}^{2n+1}$.
4. Since Equation (2) is satisfied, the following equation holds:

$$\exp(t\boldsymbol{A}) = p\boldsymbol{A}^2 + q\boldsymbol{A} + r\boldsymbol{I}\,. \tag{3}$$

Express coefficients p, q and r in terms of t without using the imaginary unit.

Continued on the next page.

II. Consider a discrete-time system where stochastic transitions between the two states (A and B) occur as shown in Figure 2.1. The transition probability in unit time from the state A to B is α and from the state B to A is β. Note that $0 < \alpha < 1$ and $0 < \beta < 1$. Variables n and k represent discrete time and are integers greater than or equal to 0 .

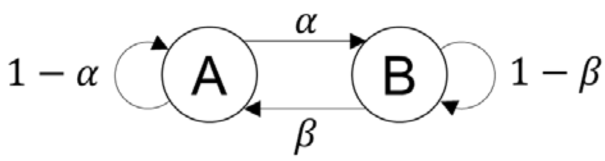

Figure 2.1

Answer the following questions.

1. Let $P_{\mathrm{A}}(n)$ be the probability that the state is A at time n and $P_{\mathrm{B}}(n)$ be the probability that the state is B at time n. Let $\boldsymbol{P}(n) = \begin{pmatrix} P_{\mathrm{A}}(n) \\ P_{\mathrm{B}}(n) \end{pmatrix}$. Express matrix $\boldsymbol{M}$ using α and β, assuming $\boldsymbol{P}(n+1) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{P}(n)$.

2. Obtain all eigenvalues and the corresponding eigenvectors of matrix $\boldsymbol{M}$.

3. As time tends towards infinity, the probability that the state is A and the probability that the state is B converge towards constant values. Obtain each value.

4. Assume $R_{\mathrm{A}}(n) = P_{\mathrm{A}}(n) - \lim_{k\to\infty} P_{\mathrm{A}}(k)$. Express $R_{\mathrm{A}}(n+1)$ by using $R_{\mathrm{A}}(n)$.

III. Assume vectors $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m$ are linearly independent in a vector space V, where m is an integer greater than or equal to 3. Obtain the condition that m must satisfy in order for $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3, \dots,\ \boldsymbol{a}_{m-1} + \boldsymbol{a}_m$ and $\boldsymbol{a}_m + \boldsymbol{a}_1$ to be linearly independent.