

平成 26 年度

大学院入学試験問題

物理学

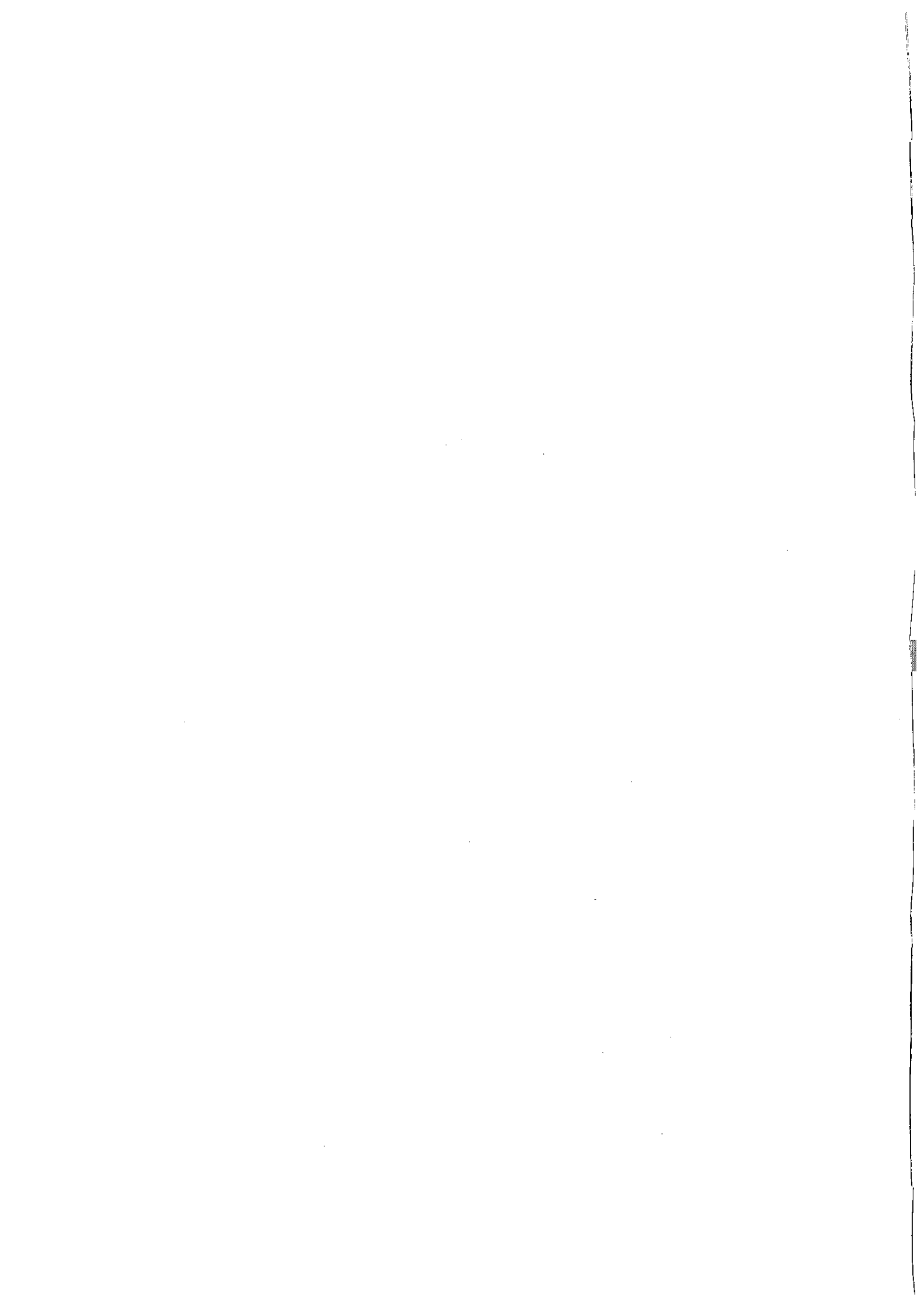
午前 9 : 00 ~ 11 : 00

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 4 問のうち、任意の 2 問を選んで解答すること。
4. 解答用紙 2 枚が渡される。1 問ごとに必ず 1 枚の解答用紙を使用すること。解答用紙に書ききれないときは、裏面にわたってもよい。
5. 解答用紙上方の指定された箇所に、受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。また、上方にある「くさび型マーク」のうち、記入した問題番号および修士課程と博士課程の区別に相当する箇所を、試験終了後に監督者の指示に従い、はさみで正しく切り取ること。したがって、解答用紙 1 枚につき 2 ケ所切り取ることになる。
6. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係のない記号、符号などを記入した答案は無効とする。
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.
------	-----

上欄に受験番号を記入すること。



草 稿 用 白 紙

草 稿 用 白 紙

第 1 問

I. 一様な面密度（単位面積当たりの質量）を持ち、厚さが無視できる半径 a 、質量 M の球殻がある。この球殻について、中心軸まわりの慣性モーメントを求めたい。球殻の変形は無視できるものとし、以下の問いに答えよ。

1. 図 1.1 のように、中心 O を通る軸 l を球殻の中心軸として考える。中心 O において、軸 l とのなす角 φ および $\varphi+d\varphi$ ($d\varphi \ll 1$) によって挟まれる球殻上の微小円輪の質量を dM とする。球殻の面密度を σ とした場合、 dM を a 、 φ 、 $d\varphi$ 、 σ を用いて表せ。
2. 球殻について、中心軸 l まわりの慣性モーメント I が $I = \frac{2}{3}Ma^2$ となることを示せ。

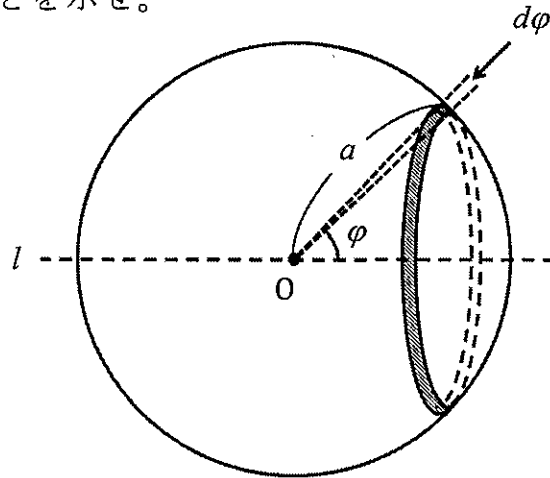


図 1.1

II. 図 1.2 に示すように水平方向に x 軸，鉛直方向に y 軸を定め， xy 平面と垂直な中心軸まわりに自由に回転できるように，球殻 A（質量 M ，半径 a ）を固定した。静止した球殻 A の頂上に球殻 B（質量 m ，半径 b ， $m < M$ ， $b < a$ ）をのせて静かに右側に転がした。B は静止した状態から転がりはじめ，最終的に A から離れた。B が A から離れるまで，2 つの球殻の間にすべりは生じなかったものとする。また運動中，2 つの球殻の中心は常に xy 平面上にあり，B の回転軸は常に xy 平面と垂直であるとする。

球殻 B が球殻 A のまわりを転がっている途中，図 1.2 のように A と B の中心を結ぶ直線と鉛直線のなす角が θ となったとき，A，B の

角速度は図 1.2 に示された向きを正として、それぞれ ω_A , ω_B であった。このとき A の中心に対する B の中心の角速度は $\dot{\theta}$, 角加速度は $\ddot{\theta}$ と書ける。転がっているあいだは A と B の接触点においてすべりが生じていないことから,

$$a\omega_A = (a+b)\dot{\theta} - b\omega_B \quad (1)$$

の関係が成り立つ。

球殻 A と B のあいだに作用する垂直抗力を R , 摩擦力を F とし, 重力加速度の大きさは g であるとする。2 つの球殻の厚さ, 変形は無視でき, 面密度も一様とする。以下の問いに答えよ。

1. 球殻 A および B について, 各々の重心まわりに関する回転の運動方程式をそれぞれ示せ。
2. 球殻 B の重心の並進運動に関しての運動方程式を, 接線方向(図 1.2 の x' 方向) および法線方向(図 1.2 の y' 方向) に分けて示せ。
3. 角速度 ω_A , ω_B を M , m , a , b , $\dot{\theta}$ を用いて表わせ。
4. 角速度 $\dot{\theta} (> 0)$ を g , M , m , a , b , θ を用いて表わせ。
5. 球殻 B が A から離れるときの θ を θ_c とする。 θ_c を M , m を用いて表わせ。

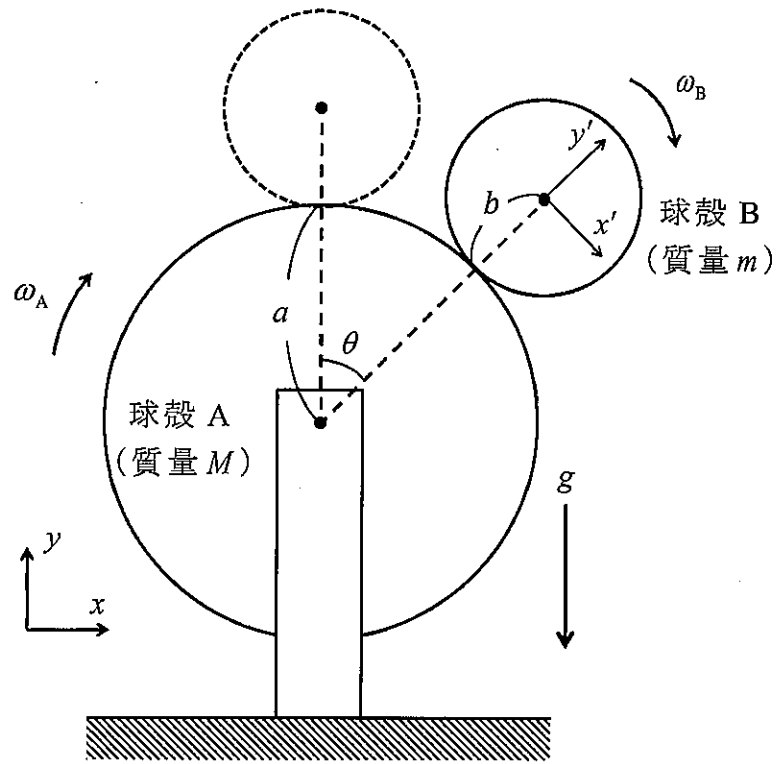


圖 1.2

第 2 問

真空中にあり、接地された無限に広い導体平板を考える。xyz 座標系の原点 O を含む yz 面に、導体平板の表面があり、点 $(a,0,0)$ ($a>0$) に点電荷もしくは電気双極子が置かれている。 $x>0$ にある任意の点 A の座標を (x,y,z) として、以下の問いに答えよ。答えに至る過程も記せ。ここで、真空の誘電率を ϵ_0 とする。

I. 図 2.1 に示すように、点 $B(a,0,0)$ に $+q$ の点電荷があるとする。 $x>0$ における電場は、導体平板を取り除いて、点 $C(-a,0,0)$ に電気映像として $-q$ の点電荷を置いた場合の電場と、同一になる。AB 間距離を r_{AB} 、AC 間距離を r_{AC} とする。また、導体平板の表面上にある原点 O を中心とした半径 r' の円と半径 $r'+dr'$ の円の間の微小面積を dS 、 dS に誘導される電荷量を dQ とする。

1. 点 A の電位 V_A を求めよ。
2. 点 A における電場の x 成分 E_x を求めよ。
3. 導体平板上の表面電荷密度 σ を求めよ。
4. dQ を求めよ。
5. 導体平板上に誘導される総電荷量 Q を求めよ。

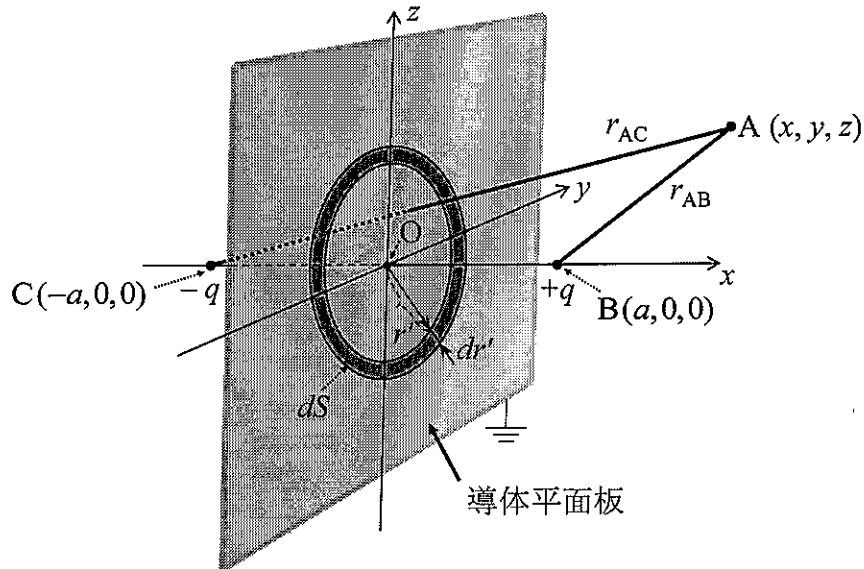


図 2.1

II. 点 $(a,0,0)$ に電気双極子の中心が置かれている場合を考える。電気双極子は距離 b を隔てて置かれた $+q$ と $-q$ の点電荷からなり、 $p(|p|=qb)$ をその電気双極子モーメントとする。電気双極子の中心か

ら点 A への位置ベクトルを $\mathbf{r} (r=|\mathbf{r}|)$ とする。また、 b が r に比べて十分に小さい ($b \ll r$) 場合を考える。なお、導体平板が無い場合において、 \mathbf{p} による点 A の電位を V とすると、 V は $V = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) / (4\pi\epsilon_0 r^3)$ で近似される。

図 2.2(a) に示すように、点 $(a, 0, 0)$ に置かれた電気双極子のモーメントを \mathbf{p}_1 とし、 \mathbf{p}_1 は x 軸と平行とする。また、その電気映像である電気双極子のモーメントを \mathbf{p}_2 とする。点 $(a, 0, 0)$ から点 A への位置ベクトルを $\mathbf{r}_1 (r_1=|\mathbf{r}_1|)$ 、 \mathbf{p}_1 と \mathbf{r}_1 のなす角度を θ_1 とする。点 $(-a, 0, 0)$ から点 A への位置ベクトルを $\mathbf{r}_2 (r_2=|\mathbf{r}_2|)$ 、 \mathbf{p}_2 と \mathbf{r}_2 のなす角度を θ_2 とする。また、図 2.2(a) の点 A の電位を V_{\parallel} 、導体平板上の表面電荷密度を σ_{\parallel} とする。

1. V_{\parallel} を求めよ。
2. σ_{\parallel} を求めよ。

図 2.2(b) に示すように、 z 軸と平行に置かれた電気双極子のモーメントを \mathbf{p}_3 、その電気映像である電気双極子のモーメントを \mathbf{p}_4 とする。また、 $\mathbf{r}_3 (r_3=|\mathbf{r}_3|)$ 、 $\mathbf{r}_4 (r_4=|\mathbf{r}_4|)$ 、 θ_3 、 θ_4 を、図 2.2(b) に示すように定義する。さらに、図 2.2(b) の点 A の電位を V_{\perp} 、導体平板上の表面電荷密度を σ_{\perp} とする。

3. V_{\perp} を求めよ。
4. 導体平板上の点 $(0, 0, a)$ における $\sigma_{\perp} / \sigma_{\parallel}$ を求めよ。
5. $y=0$ における σ_{\perp} の z 依存性の概形を図示せよ。また、 σ_{\perp} の z 依存性に極値があれば、この極値を求め図に明記せよ。

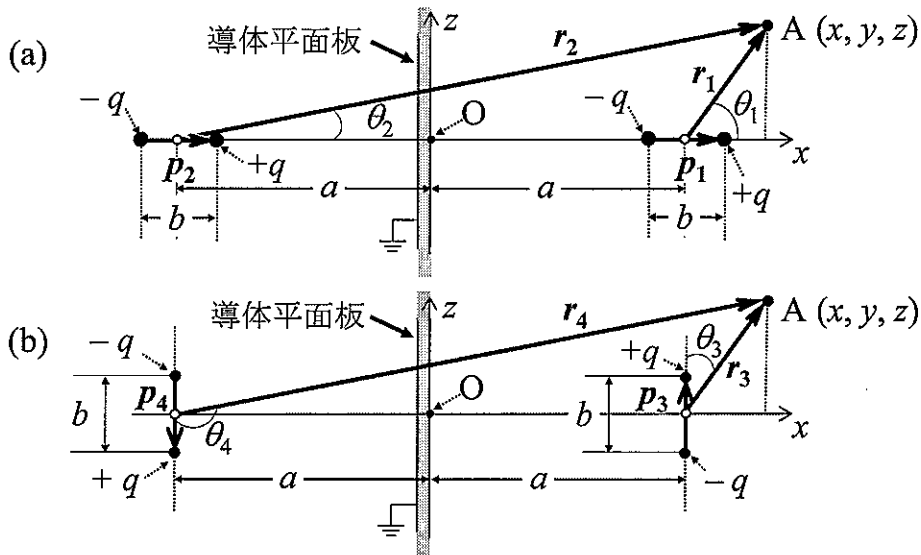


図 2.2

第3問

気体を作動流体とする熱過程を考える。この作動流体の圧力を P ，比容積 (1 モルあたりの体積) を V ，絶対温度を T ，気体定数を R ，1 モルあたりの内部エネルギーを U ，1 モルあたりのエントロピーを S と表す。また，1 モルあたりのエンタルピーを $H=U+PV$ ，定積比熱を $C_V=(\partial U/\partial T)_V$ ，定圧比熱を $C_P=(\partial H/\partial T)_P$ ，比熱比を $\kappa=C_P/C_V$ と定義する。全ての状態変化は準静的であるとし， $dU=TdS-PdV$ が成り立つと仮定してよい。以下の問いに答えよ。

I. 作動流体の状態方程式に関係なく，以下の関係式(1)～(4)が成り立つことを，それぞれ導け。

$$C_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V \quad (1)$$

$$C_P = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P \quad (2)$$

$$C_P - C_V = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_S = \kappa \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \quad (4)$$

必要ならば，マクスウェル関係式，

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \quad (5)$$

および，連鎖律の式，

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_S \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right)_T = -1 \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_S \left(\frac{\partial P}{\partial S} \right)_T = -1 \quad (7)$$

を用いてよい。

II. 作動流体が理想気体の状態方程式

$$PV = RT \quad (8)$$

に従う場合を考える。 R と C_P を共に定数として，以下の問いに答えよ。

1. 式(3)を用いて， κ が定数であることを示せ。
2. 式(4)を用いて，断熱過程では，

$$PV^\kappa = \text{一定} \quad (9)$$

の関係が成り立つことを示せ。

Ⅲ. 図3.1の T - S 線図で表される理想的な熱サイクル $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow O$ (中間冷却ガスタービンサイクル) を考える。作動流体は、理想気体の状態方程式 (8) に従うものとし、 R と C_p を共に定数とする。作動流体の P と T は、

状態 $O (P_O, T_O)$ から、断熱圧縮過程を経て、状態 $A (P_A, T_A)$ へ、
 状態 $A (P_A, T_A)$ から、定圧冷却過程を経て、状態 $B (P_B, T_B)$ へ、
 状態 $B (P_B, T_B)$ から、断熱圧縮過程を経て、状態 $C (P_C, T_C)$ へ、
 状態 $C (P_C, T_C)$ から、定圧加熱過程を経て、状態 $D (P_D, T_D)$ へ、
 状態 $D (P_D, T_D)$ から、断熱膨張過程を経て、状態 $E (P_E, T_E)$ へ、
 状態 $E (P_E, T_E)$ から、定圧冷却過程を経て、状態 $O (P_O, T_O)$ へ変化する。

ただし、 $P_D = P_C \geq P_B = P_A \geq P_O = P_E$ である。また、過程 $A \rightarrow B$ (中間冷却過程) では理想的な熱交換が行われるとして $T_B = T_O$ とする。サイクル最高最低温度比を $\tau = T_D/T_O$ 、全体圧力比を $r = P_C/P_O$ 、過程 $O \rightarrow A$ における圧力比を $r_{OA} = P_A/P_O$ 、作動流体 1 モルが 1 サイクルあたりにする仕事を W と表す。

1. T_C を、 T_O, κ, r, r_{OA} を用いて表せ。
2. T_E を、 T_O, κ, τ, r を用いて表せ。
3. このサイクルにおいて、 W は、

$$W = -C_p \{ (T_A - T_O) + (T_C - T_B) + (T_E - T_D) \} \quad (10)$$

により与えられる。 W を、 $C_p, T_O, \kappa, \tau, r, r_{OA}$ を用いて表せ。

4. T_O, τ および r を固定したとき、 W を最大にする r_{OA} を、 r を用いて表せ。
 また、その時の W を $C_p, T_O, \kappa, \tau, r$ により表せ。

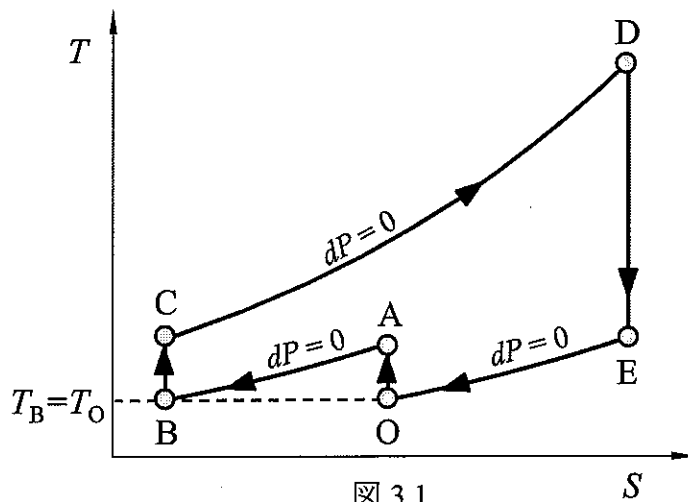


図 3.1

第 4 問

図 4.1 に示す xy 平面中の点 $A(-a, 0)$ ($a > 0$) に点光源を設置した。また、薄い平凸レンズを、光軸が x 軸上に、かつレンズの平らな面が $x=0$ に位置するように設置した。レンズの凸面は曲率半径 R の球面である。レンズの開口半径を r とし、また、 xy 平面内の $y=y_0$ におけるレンズの厚さを $T(y_0)$ 、レンズの最大の厚さを T_0 とする。その結果、点光源から射出した光が点 $B(b, 0)$ ($b > 0$) に結像された。この点光源およびレンズからなる結像系は空気中にあるものとする。また、空気の屈折率を 1、レンズの屈折率を n とする。なお、点 $C(0, y_0)$ ($|y_0| < r$) でレンズの平面側に入射した光線は、レンズの凸面側の点 D から射出するものとする。

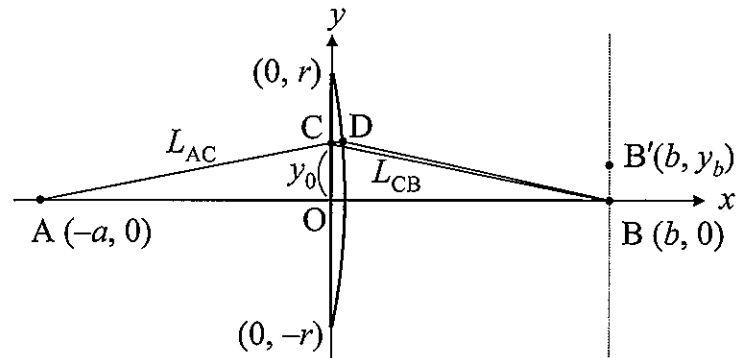


図 4.1

- I. 点 A から点 B に至る光線のうち、点 C, D を経由する光線を考える。また、 AC および CB の幾何学的長さを L_{AC} , L_{CB} とする。以下の問いに答えよ。

1. L_{AC} , L_{CB} , $T(y_0)$ を求めよ。
2. $|y_0| \ll a, b, R$ の条件のもとで、 L_{AC} , L_{CB} , $T(y_0)$ を多項式で近似せよ。ただし、実数 m, s に対して $|s| \ll 1$ のときに成り立つ近似式

$$(1+s)^m \approx 1+ms \quad (1)$$

を用いてよい。

3. さらに、光線と x 軸とのなす角が小さいとすると、 CD および DB の幾何学的な長さはそれぞれ $T(y_0)$ および $L_{CB} - T(y_0)$ と近似できる。また、レンズ内の光路長は幾何学的長さの n 倍となる。こ

れらを考慮し、点 A から点 C, D を経由して点 B に至る光路長 $L(y_0)$ を求めよ。

4. フェルマーの原理として、A と B が結像関係にあるとき、 y_0 の変化に対して $L(y_0)$ が変化しないことが知られている。この原理を用いて、 a と b の関係およびレンズの焦点距離を求めよ。

II. 実際には、点 B における像は有限の大きさを持つ。このことは光の波動性により説明される。点光源からは全方位に光が放射されるが、レンズの平らな面上にスリットを置くことで xy 平面近傍を通る光のみレンズを通過するようにした。このときの、集光面 $x=b$ における強度分布を求めたい。点 A から点 C, D を通り、点 B' (b, y_b) に至る光路長を $L'(y_0, y_b)$ とする。点 B' における光の電場の複素振幅 $E(y_b)$ は、複数の光路を通過して到来する光波の重ね合わせである。ここで、光路長に応じて光の位相が $kL'(y_0, y_b)$ だけ変化することを考慮する。ただし、 $k=2\pi/\lambda$ は波数、 λ は波長である。このとき、 $E(y_b)$ は近似的に次式で表すことができる。

$$E(y_b) = A_0 \int_{-r}^r \exp[ikL'(y_0, y_b)] dy_0 \quad (2)$$

ただし、 A_0 は複素定数であり、また、 i は虚数単位である。以下の問いに答えよ。

1. $L'(y_0, y_b)$ を求め、これが y_0 の一次式で表されることを示せ。なお、設問 I と同じ近似を用いて良い。
2. 式(2)を用いて $x=b$ における強度分布 $|E(y_b)|^2$ を計算せよ。
3. $|E(y_b)|^2$ の概形を示せ。また、光強度が極小となる y_b を求めよ。

草 稿 用 白 紙



