平成25年度

大学院入学試験問題

数　学

午後1：00～3：30

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 6問のうち，任意の3問を選んで解答すること。
4. 解答用紙3枚が渡される。1問ごとに必ず1枚の解答用紙を使用すること。解答用紙に書ききれないときは，裏面にわたってもよい。
5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。また，上方にある「くさび型マーク」のうち，記入した問題番号および修士課程と博士課程の区別に相当する箇所を，試験終了後に監督者の指示に従い，はさみで正しく切り取ること。したがって，解答用紙1枚につき2ケ所切り取ることになる。
6. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

第1問

I. 以下の微分方程式の一般解をそれぞれ求めよ。ただし，e は自然対数の底である。

1. $$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 4e^{2x} \tag{1}$$

2. $$x^3\frac{d^3y}{dx^3} - 3x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 6x\frac{dy}{dx} - 6y = 2x^4e^x \tag{2}$$

II. 次の積分の値を計算せよ。

$$\int_0^{\pi/2} \cos(2\theta)\ \log(\cos\theta)\ d\theta \tag{3}$$

第2問

次の実対称行列 $\boldsymbol{A}$ について，以下の問いに答えよ。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

I. 行列 $\boldsymbol{A}$ の全ての固有値と，これらに対応する固有ベクトルを求めよ。

II. $\boldsymbol{A}^n$ を求めよ。ただし，n は自然数とする。

III. λ を $\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \neq 0$ を満たす実数とする。ただし，$\boldsymbol{I}$ は 3×3 の単位行列であり，$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ は $(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ の行列式を表す。ここで，ベクトル $\boldsymbol{x}$ を一次方程式

$$(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{2}$$

の解とする。ただし

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

である。このとき，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ が以下の式で表されることを示せ。

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \frac{3}{(\lambda-1)^2} + \frac{2}{(\lambda-2)^2} + \frac{6}{(\lambda-4)^2} \tag{4}$$

ここで，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ は $\boldsymbol{x}$ を転置したベクトルである。

第3問

複素関数についての以下の問いに答えよ。ただし，i は虚数単位とする。

I. z 平面 $(z = x + iy)$ 上で定義された次の有理関数について，以下の問いに答えよ。

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)z(z+2)} \tag{1}$$

1. z 平面上の領域 $1 < |z-1| < 3$ における $f(z)$ のローラン展開を求めよ。

2. 閉曲線 $|z-1| = 2$ を反時計方向に回る積分路 C に対して，$\int_C f(z)dz$ を求めよ。

II. z 平面 $(z = x + iy)$ 上で定義された次の有理関数について，以下の問いに答えよ。

$$g(z) = \frac{z^2}{z^4+1} \tag{2}$$

1. $g(z)$ の極のうち，上半平面にあるものを全て求めよ。

2. $g(z)$ に対して留数定理を適用して，次の定積分の値を求めよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx \tag{3}$$

第4問

3次元空間中の楕円上を，一定周期で周回している点がある。回転する座標系から見たこの点の運動を，以下の手順で考える。

静止直交座標系 xyz において，xy 平面上の楕円 C_0 に沿った点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ の運動 (図 4.1) を，媒介変数 t を用いて次のように表す。

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(-b+\cos t) \\ a\sqrt{1-b^2}\sin t \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

ここで，a, b は $0 < a$，$0 < b < 1$ を満たす定数である。

次に，図 4.2 に示すように，楕円 C_0 を y 軸まわりに角度 θ だけ回転させる。この操作により，楕円 C_0 および点 P_0 は，それぞれ楕円 C_1 および点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ に変換されるものとする。ただし θ は $0 < \theta < \pi/2$ および次式を満たす。

$$(1+b)\cos^2\theta \ < \ 1-b \tag{2}$$

最後に，回転する直交座標系 XYZ を考える。図 4.3 に示すように，両座標系の原点は共通であり，Z 軸と z 軸は同一である。X 軸と x 軸が成す角度は，式 (1) で用いられる媒介変数 t である。座標系 XYZ における点 P_1 の座標を (X_1, Y_1, Z_1) と表す。

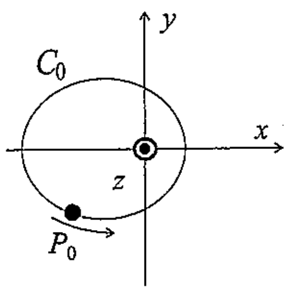

図 4.1

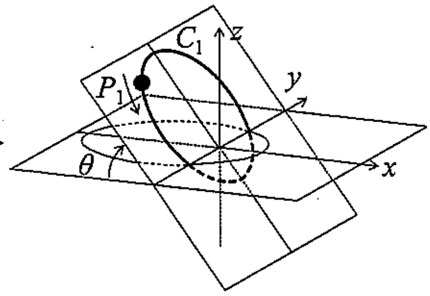

図 4.2

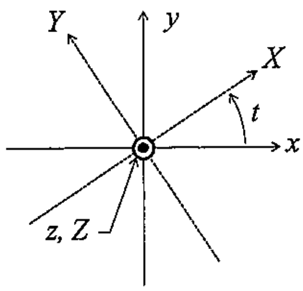

図 4.3

このとき，以下の問いに答えよ。

I. 静止座標系 xyz における点 P_1 の座標 (x_1, y_1, z_1) を，t の関数として求めよ。

II. 回転座標系 XYZ における点 P_1 の座標 (X_1, Y_1, Z_1) を，t の関数として求めよ。

III. 点 P_1 が $Y = 0$ 面を通過する際の t の値およびそれに対応する XYZ 座標を，$0 < t < 2\pi$ の範囲内で，すべて求めよ。

IV.　XY 平面上に投影される点 P_1 の軌跡の概形を，$t = \dfrac{k\pi}{4}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, 7)$ に対応する点を図示しながら描け。

第5問

関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t)\, dt \tag{1}$$

で定義すると，フーリエ逆変換は

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(i\omega t)\, d\omega \tag{2}$$

で与えられる。一方，t_0 を周期とする関数 $g(t)$ のフーリエ係数 c_n を

$$c_n = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} g(t) \exp(-in\omega_0 t)\, dt \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{3}$$

で定義すると，$g(t)$ のフーリエ級数展開は

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\omega_0 t) \tag{4}$$

で与えられる。ただし，i は虚数単位，$\omega_0 = \dfrac{2\pi}{t_0}$ である。以下の問いに答えよ。

I. 関数 $f(t)$ とデルタ関数 $\delta(t)$ を用いて，以下の関数 $f_d(t)$ を定義する。なお，T_0 は正の実定数である。

$$f_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT_0)\, \delta(t - kT_0) \qquad (-\infty < t < \infty) \tag{5}$$

式 (1) を用いて，$f_d(t)$ のフーリエ変換 $F_d(\omega)$ を計算せよ。

II. I の結果を用いて，$F_d(\omega)$ が ω に関する周期関数であることを示せ。また，任意の関数 $f(t)$ に対して共通な周期を求めよ。

III. $f(t)$ は t に関して KT_0（ただし K は自然数）を周期とする任意の周期関数であり，$f_d(t)$ も KT_0 を周期に持つ周期関数とする。式 (3) を用いて，$f_d(t)$ のフーリエ係数 d_n を計算せよ。なお積分区間は，十分小さい正の実数 ε を用いて定義される1周期 $0 - \varepsilon \le t \le KT_0 - \varepsilon$ を考えればよい。また，d_n は n に関して周期を持つ。任意の $f(t)$ に対する共通の周期 L を，K を用いて表せ。

IV. $K=6$ として d_n を計算する。この場合，d_n の計算には $f(0), f(T_0), \cdots, f(5T_0)$ のみが必要である。また，III で示した d_n の周期性より，$d_0, d_1, \cdots, d_{L-1}$ のみを求めれば良い。すると $d_n\,(n=0,1,\cdots,L-1)$ は，6 次元列ベクトル

$$\boldsymbol{f}=\begin{bmatrix} f(0) \\ f(T_0) \\ \vdots \\ f(5T_0) \end{bmatrix} \tag{6}$$

に対して, L 行 6 列の行列 $\boldsymbol{W}$ を乗じて得られる L 次元列ベクトル

$$\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{L-1} \end{bmatrix} \tag{7}$$

の要素として表される。$a = \exp\left(-i\dfrac{2\pi}{6}\right)$ としたとき，行列 $\boldsymbol{W}$ の各要素を a^m $(m=0,1,2)$ と T_0 を用いて表せ。

第6問

赤玉 k 個 (k は2以上の整数)，白玉 k 個と，袋A，Bがある。袋Aには2個，袋Bには残りの玉が入っている。袋 A の中にある玉が赤玉 2 個の場合を状態 S_0，赤玉1個と白玉1個の場合を状態 S_1，白玉 2 個の場合を状態 S_2 とする。

ここで，袋 A から無作為に1つ玉を取り出して袋 B に入れ，次に袋 B から無作為に1つ玉を取り出して袋 A に戻す過程を 1 回の操作とする。

以下の問いに答えよ。

I. 袋 A の最初の状態が S_1 であるとき，1回目の操作後に，袋 A がとる各状態の確率を求めよ。

II. 袋 A の最初の状態が S_0 であるとき，2回目の操作後に，袋 A がとる各状態の確率を求めよ。

III. n 回目 (n は自然数) の操作後に袋 A がとる各状態の確率が与えられた時，これらを用いて，$n+1$ 回目 の操作後に袋 A がとる各状態の確率を表せ。

IV. 十分大きな回数の操作を行った後に，袋Aがとる各状態の確率を求めよ。