平成24年度

大学院入学試験問題

数　学

午後1：00～3：30

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 6問のうち，任意の3問を選んで解答すること。
4. 解答用紙3枚が渡される。1問ごとに必ず1枚の解答用紙を使用すること。解答用紙に書ききれないときは，裏面にわたってもよい。
5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。また，上方にある「くさび型マーク」のうち，記入した問題番号および修士課程と博士課程の区別に相当する箇所を，試験終了後に監督者の指示に従い，はさみで正しく切り取ること。したがって，解答用紙1枚につき2ケ所切り取ることになる。
6. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

第 1 問

I.　微分方程式

$$\frac{dy}{dx}+\left(2x^2+1\right)y+y^2+\left(x^4+x^2+2x\right)=0 \qquad (1)$$

の一般解を求めよ。ただし，$y=-x^2$ が特解であることを用いてよい。

II.　y は 2 階微分までが連続な x の実関数であり，$y'=dy/dx$ とするとき，次の汎関数

$$I(y)=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')dx \qquad (2)$$

の極値を与える $y(x)$ を求めたい。以下の問いに答えよ。

1.　任意の微分可能な関数 $\eta(x)$ に対して，$Y(x)=y(x)+k\eta(x)$ とおく。実数 k が微小であるとき（$|k|<<1$），$\delta I=I(Y)-I(y)$ を k について展開し，1 次の項まで示せ。
2.　式(2)の積分範囲両端において，$y(x_1)=y_1$，$y(x_2)=y_2$ が満たされるとする。II.1 の結果を用いて，$I(y)$ の極値を与える条件を，F，x，y，y' の式で表せ。
3.　式(2)の積分範囲の端点のうち，$y(x_1)=y_1$ のみが与えられているとき，$I(y)$ の極値を与える条件を求めよ。
4.　$F(x,y,y')=y'^2+y^2$，$x_1=0$，$x_2=1$，$y(x_1)=1$ のとき，$I(y)$ の極値を与える関数 $y(x)$ を求めよ。

第 2 問

次の行列$\mathbf{A}$について考える。

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

ここで，αは 0 以上の実数$(\alpha \ge 0)$とする。以下の問いに答えよ。

I. $\alpha=\dfrac{5}{2}$のとき，行列$\mathbf{A}$のすべての固有値と，対応する大きさ 1 の固有ベクトルを求めよ。

II. αが任意の正の実数$(\alpha > 0)$のとき，行列$\mathbf{A}$の固有値をλ_1，λ_2，λ_3とする。

1. λ_1，λ_2，λ_3をαの式で表し，これらがすべて実数であることを示せ。
2. $\displaystyle\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\max(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}{\alpha}$ を求めよ。ただし$\max(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$は$\lambda_1$，$\lambda_2$，$\lambda_3$の最大値とする。
3. $\displaystyle\lim_{\alpha\to\infty}\min(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ を求めよ。ただし$\min(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$は$\lambda_1$，$\lambda_2$，$\lambda_3$の最小値とする。

III. $\alpha=0$のとき，$\mathbf{A}^n$の行列要素を求めよ。ただし，nは正の整数である。

第 3 問

複素関数についての以下の問いに答えよ。ただし，iは虚数単位とし，eは自然対数の底とする。

I.　式(1)で表される複素関数による，z平面$(z=x+iy)$からζ平面$(\zeta=\xi+i\eta)$への写像を考える。

$$f(z)=\frac{1+z}{1-z} \tag{1}$$

関数$\zeta=f(z)$はz平面上の単位円の内部$|z|<1$を，ζ平面上の右半面$\mathrm{Re}\zeta>0$に写像することを示せ。また，z平面上における単位円周上の点$z=e^{i\varphi}$　$(0<\varphi<2\pi)$の，$\zeta=f(z)$によるζ平面上への写像を求めよ。

II.　ζ平面上の$\mathrm{Re}\zeta>0$で正則，かつ$\mathrm{Re}\zeta\geq 0$で連続な関数$h(\zeta)$を考える。このとき，$\zeta_0=\xi_0+i\eta_0$と$\zeta_1=-\xi_0+i\eta_0$（$\xi_0>0$，$-\infty<\eta_0<+\infty$）に対し，図 3.1 に示すような半径R（$R^2>\xi_0^2+\eta_0^2$）の半円C_Rと直径C_iからなる経路Cを負の向き（時計回り）に一周する積分路について，式(2)が成り立つ。

$$\begin{cases} h(\zeta_0)=-\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \frac{h(\zeta)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta \\ \quad\;\; 0=-\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \frac{h(\zeta)}{\zeta-\zeta_1}d\zeta \end{cases} \tag{2}$$

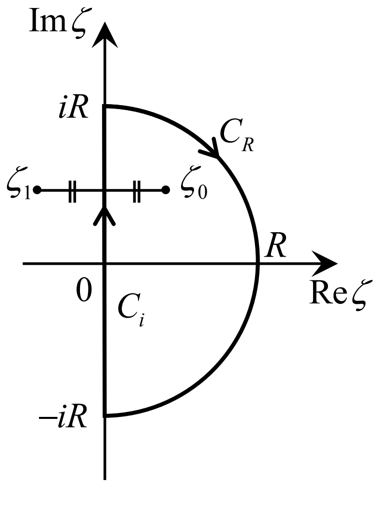

図 3.1

式(2)を利用し，式(3)が成り立つことを導出過程も含め示せ。ただし，$\displaystyle\lim_{|\zeta|\to\infty}|h(\zeta)|=0$とする。

$$h(\xi_0+i\eta_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi_0}{\xi_0^2+(\eta_0-t)^2}h(it)dt \tag{3}$$

III.　z 平面上の $|z|<1$ で正則かつ $|z|\le 1$ で連続な関数 $k(z)$ は，$0\le r<1$，$0<\theta<2\pi$ を満たす任意の r，θ に対し，式(4)を満たすことを導出過程も含め示せ。

$$k(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}k(e^{i\varphi})d\varphi \tag{4}$$

第 4 問

直交座標系 xyz において，式(1)で定義される領域 A，式(2)で定義される領域 B，式(3)で定義される領域 C について，以下の問いに答えよ。ただし $r > 0$ とする。

$$x^2 + y^2 \le r^2 \tag{1}$$
$$y^2 + z^2 \le r^2 \tag{2}$$
$$z^2 + x^2 \le r^2 \tag{3}$$

I. 領域 A と領域 B の交差する領域を D とする。
   1. 領域 D を平面 $y = t$ で切ったときの切り口の面積を求めよ。ただし，$0 \le t \le r$ とする。
   2. 領域 D の体積と表面積を求めよ。

II. 領域 A，領域 B，および領域 C の交差する領域を E とする。
   1. 領域 E において，$x^2 + y^2 + z^2$ の最大値を求めよ。また，その最大値を与える点をすべて求めよ。
   2. 領域 E の体積と表面積を求めよ。

第 5 問

関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-i\omega x)dx \tag{1}$$

で定義すると，フーリエ逆変換は

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(i\omega x)d\omega \tag{2}$$

で与えられる。ただし，i は虚数単位とする。以下の問いに答えよ。

I. 関数 $f(x)$ が次の式(4), (5), (6)で示されるとき，それぞれの $F(\omega)$ を求めよ。

ここで，関数 $g(x)$ は次の式(3)で示される。

$$g(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{|x|}{d} & |x|\le d \\ 0 & |x|>d \end{cases} \tag{3}$$

ただし，a，d は $0<d<\dfrac{a}{2}$ を満たす定数とし，N は正の整数とする。

1. $f(x)=g(x)$ (4)

2. $f(x)=g(x-a)+g(x)+g(x+a)$ (5)

3. $f(x)=\displaystyle\sum_{n=-N}^{N} g(x-na)$ (6)

II. 関数 $f(x)$ が式(6)のとき，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2 d\omega$ を求めよ。

第 6 問

I.　1 つの粒子が数直線に沿って運動している。粒子は原点 0 から出発し，毎ステップごとに，等確率 1/3 でランダムに，-1 または 0 または $+1$ だけ移動する。以下の問いに答えよ。

1.　n ステップ後の粒子の位置の平均および分散を求めよ。n は正の整数とする。
2.　L を正の整数とする。粒子は数直線上の $-L$ または $+L$ に到達すると運動を終了する。粒子が k に位置するとき，運動を終了するまでに要するステップ数の期待値を $e(k)$ と表す。ただし，k は，$-L<k<L$ を満たす整数であるとする。$e(k)$，$e(k-1)$，$e(k+1)$ の間に成り立つ差分方程式を示せ。
3.　前問で求めた差分方程式の解は k についての 2 次式で表される。$e(k)$ を求めよ。ただし，終端条件を $e(-L)=e(L)=0$ とする。

II.　すべての異なる頂点が辺で繋がっているグラフを完全グラフと呼び，頂点数が n の完全グラフを K_n で表す。図 6.2 と図 6.3 はそれぞれ K_5 と K_6 の例である。完全グラフの辺を 2 通りにラベル付けする。図 6.1 に完全グラフ K_4 のラベル付け例を示す。以下では 2 通りのラベルの辺をそれぞれ実線と点線で表す。このとき次の問いに答えよ。

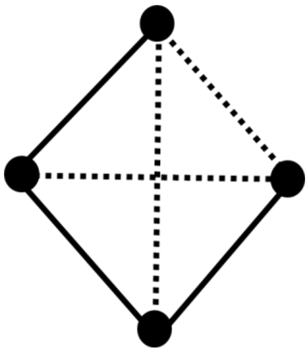

図 6.1

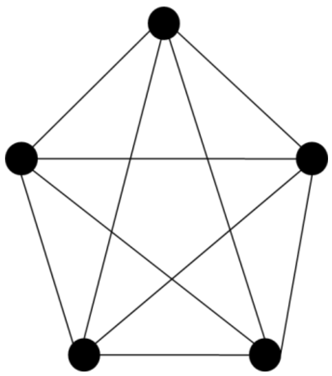

図 6.2

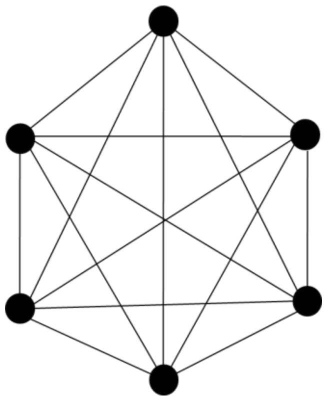

図 6.3

1. 図 6.1 のラベル付けには，同じラベルの３辺をもつ K_3 が含まれない。同様にして，図 6.2 の完全グラフ K_5 の辺を２通りにラベル付けして，同じラベルの３辺をもつ K_3 が含まれないようにせよ。

2. 「6 人集まれば，互いに知り合いである 3 人組か，互いに見知らぬ 3 人組が必ず存在する」という命題がある。この命題を図 6.3 に示した完全グラフ K_6 の辺のラベル付けを利用して証明せよ。ただし，一方的に知っているという関係は考えない。

3. 完全グラフ K_8 の辺を２通りにラベル付けする。このとき次の２種類の完全グラフを両方とも含まないようなラベル付けの例を示せ。
   - 全ての辺が実線である完全グラフ K_3
   - 全ての辺が点線である完全グラフ K_4