平成23年度

大学院入学試験問題

物理学

午前9：00〜11：00

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 4問のうち，任意の2問を選んで解答すること。
4. 解答用紙2枚が渡される。1問ごとに必ず1枚の解答用紙を使用すること。解答用紙に書ききれないときは，裏面にわたってもよい。
5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。また，上方にある　くさび型マークのうち，記入した問題番号および修士課程と博士課程の区別に相当する箇所を，試験終了後に監督者の指示にしたがい，はさみで正しく切り取ること。したがって，解答用紙1枚につき2ケ所切り取ることになる。
6. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

第 1 問

図 1.1 に示す水槽内の水の運動を考える。水の運動は奥行きに一様で，水平方向と波高の上下方向の運動を行うとする。また，水平方向（x方向）の速度uは，深さ方向（y方向）に分布を持たない，すなわち図において斜線で示した水柱全体が同じ水平速度uで運動するものとする。波高変化は水柱全体の容積変化で起きるとし，その際の垂直方向の流れについては考慮しなくてよい。

ここに，水の密度をρ，重力加速度をg，静止状態の水深をH，水槽の幅をWとする。時刻tでの位置xの地点における波高を$h(t,x)$，すなわち水深を$H+h(t,x)$と表記し，x方向の速度を$u(t,x)$と表記する。

なお，水槽底面と水の抵抗は無視でき，また、水面における空気との摩擦は無視できる。波高$h(t,x)$は静止状態の水深Hよりも十分小さいとし，また表面張力は考えないものとする。

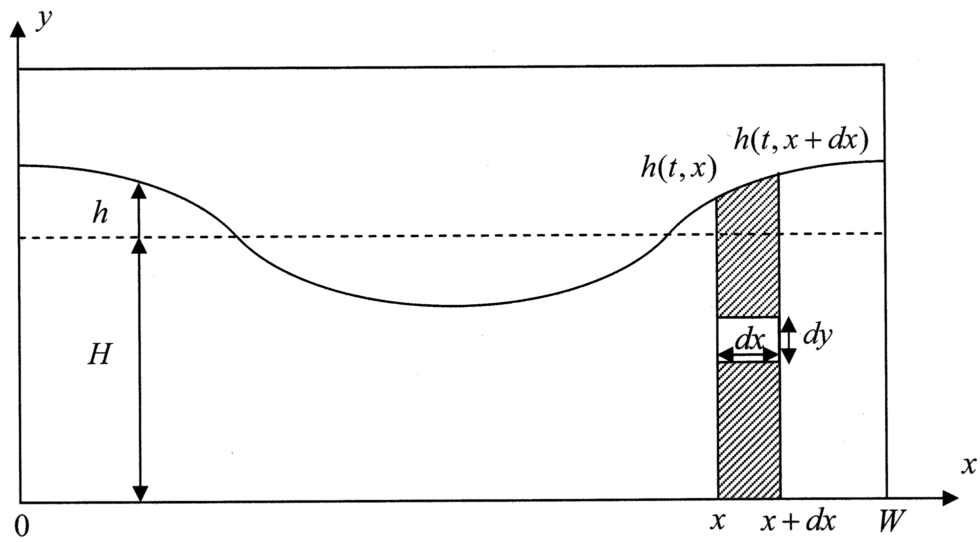

図 1.1

I. 図 1.1 において微小要素$dxdy$を考え，同要素のx方向への速度$u(t,x)$の時間変化（時間偏微分）を，x方向の前後の水圧差に着目して，本問で与えられた記号を用いて記述せよ。

II. 位置xの地点での静止水面からの波高$h(t,x)$の時間変化（時間偏微分）を，斜線部の水柱の容積の変化がx方向の前後からの流入・流出量の合計と釣り合うことに注目して，本問で与えられた記号を用いて記述せよ。

III. $u(t,x)$ および $h(t,x)$ が満たすべき偏微分方程式を I，II の結果を用いて表せ。

IV. III で得られた結果から，この水槽の波が伝播する速度を記せ。

V. $h(t,x)$ は t の関数と x の関数の積で表現できるとする。図 1.1 のように，波高 $h(t,x)$ が両端と中央で極値をとり，両端と中央で位相が逆となる運動のうち，最長の周期を求めよ。

第 2 問

図 2.1 に示す変圧器を考える。磁心はドーナッツ状で，平均円周，断面積はそれぞれ l, S，一次巻線および二次巻線の巻数はそれぞれ N_1 回，N_2 回である。以下の問いに答えよ。ただし，磁心の透磁率を μ とせよ。なお，磁心からの磁束の漏れ，磁心内部での電気的・磁気的損失，導線での電気的損失はないものとせよ。また，特にことわりのないかぎり，磁心の磁気飽和は考慮しない。

I. 図 2.2 のように一次巻線の両端には交流電圧 $v_1 = V_1 \cos\omega t$ を印加し，二次巻線の両端は開放する。一次巻線に流れる電流 i_1，二次巻線両端に生ずる電圧 v_2 を求めよ。

II. 図 2.3 のように，一次巻線の両端に交流電圧 $v_1 = V_1 \cos\omega t$ を印加する。二次巻線には電極間距離 d，幅 w，奥行き a の平板コンデンサを接続し，厚さ d，奥行き a の誘電体を図中右側から $w/2$ だけ挿入して固定する。すなわち，誘電体の左端はコンデンサの中間点に到達している。空気と誘電体の誘電率をそれぞれ ε_a，ε_d として以下の問いに答えよ。なお，平板コンデンサ内の電気力線はすべて平行であるとせよ。

1. 一次巻線の電流振幅の最小値 I_m とそれを与える印加電圧角振動数 ω_m を求めよ。なお，空気や誘電体内での誘電損失は無視せよ。
2. 誘電体には，コンデンサ内部に引き込もうとする角振動数 Ω の周期的な力が働く。この角振動数 Ω を印加電圧角振動数 ω によって表せ。

III. I の場合について考える。実際の磁心では，磁気飽和のため磁束密度の大きさは B_s を超えることはできない。磁気飽和を起こさずに，一次巻線に加えることができる電圧振幅 V_1 の最大値を求めよ。

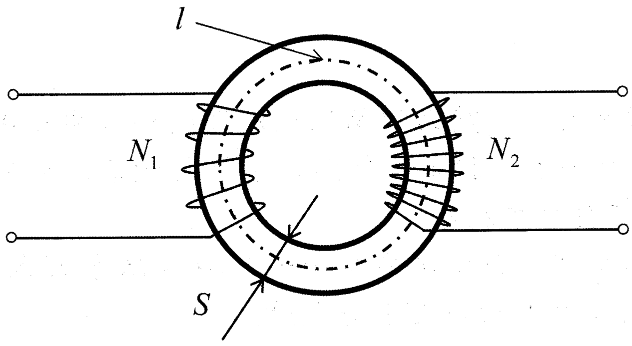

図 2.1

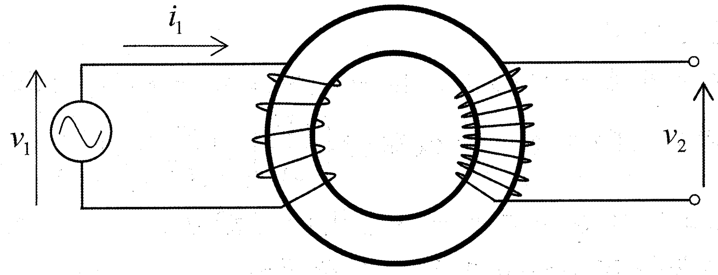

図 2.2

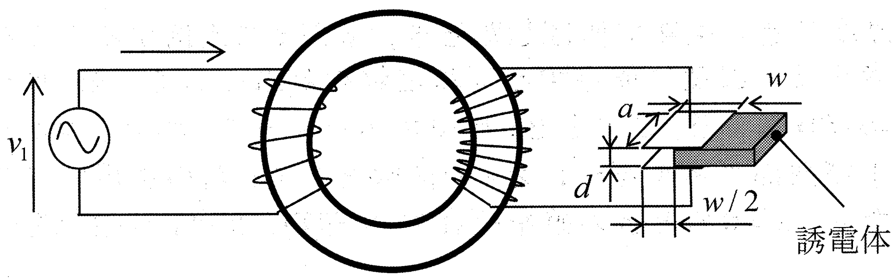

図 2.3

第 3 問

I. 可逆過程を考えると，熱力学第一法則は内部エネルギーU，絶対温度T，エントロピーS，および外からされた仕事$d'W$を用いて
$dU = TdS + d'W$で表わされる。

1. ヘルムホルツの自由エネルギー$F = U - TS$を導入すると
$dF = -SdT + d'W$となることを示せ。
2. 等温過程においては自由エネルギーの変化量が系の受けた仕事に対応することを説明せよ。

II. ばねが伸びる可逆過程を考える。ばねの伸びがxのときにばねにかかる張力をσとして，以下の設問に答えよ。ただし，ばねの体積変化は無視できるとする。

1. 内部エネルギーUおよび自由エネルギーFの，ばねの伸びxと絶対温度Tに関する一次偏微分$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_T$，$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_x$，$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_T$，$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_x$を$x$，$T$，$\sigma$およびエントロピー$S$を用いて記せ。
2. 以下の関係式が成立することを示せ。

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_T = \sigma - T\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_x$$

3. 温度一定の条件で伸ばしたとき，σがxに比例するようなばねを考える。温度に依存するばね定数を$k(T)$として，張力を$\sigma = k(T)x$とする。このとき，自由エネルギーF，エントロピーS，および内部エネルギーUをxの関数として，$k(T)$を用いて表わせ。ただし，$x = 0$のときの値をそれぞれ$F_0(T)$，$S_0(T)$，$U_0(T)$とせよ。

III. 伸びxが一定の条件で測定したときのゴム糸の張力σは，多くの場合において近似的に絶対温度Tに比例することが知られている。このとき，以下の設問に答えよ。ただし，ゴム糸の張力は等温過程において伸びxに比例するとする。

1. 張力$\sigma = AT \ (A > 0)$として，ゴム糸の内部エネルギーUは温度のみの関数となることを示し，かつ，エントロピーSは伸びxの増加とともに減少することを示せ。IIで示した関係式を用いてよい。

2. このような場合において，ゴム糸の張力の起源について推測されることを簡潔に述べよ。その際，次のキーワードを用いよ：理想気体，圧力，分子，熱運動。
3. このゴム糸を断熱的に引き伸ばすと温度が上昇することを示せ。ただし，伸び一定としたときのゴム糸の熱容量を C_x $(C_x > 0)$ とする。

第 4 問

次の井戸型ポテンシャル内で一次元運動する質量mの粒子を考える。

$$V(x)=\begin{cases}+\infty & (|x|>a/2)\\ 0 & (|x|\le a/2)\end{cases}$$

ここで，aは正の定数とする。この粒子のハミルトニアンHは

$$H=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)$$

で与えられる。ただし，プランク定数をhとして，$\hbar=h/2\pi$である。

I.　シュレディンガー方程式$H\psi(x)=E\psi(x)$を解いて，このポテンシャルに束縛された粒子の定常状態における規格化された波動関数$\psi_n(x)$とエネルギー固有値E_nを求めよ。ただし，nはエネルギーの順序を示す正の整数で，最低エネルギー状態を$n=1$とする。

II.　時刻$t=0$における粒子の規格化された波動関数が，定数Aを用いて

$$\Psi(x,t=0)=A\left(4\cos^3\frac{\pi}{a}x-5\cos\frac{\pi}{a}x\right)$$

と書けるものとする。

1.　Aの値を求め，$\Psi(x,t=0)$をIで求めた$\psi_n(x)$の線形結合の式で表わせ。ただし，等式$4\cos^3\theta=3\cos\theta+\cos3\theta$を用いてよい。
2.　この粒子のエネルギーの期待値$\langle E\rangle$を求めよ。
3.　時間に依存したシュレディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)=H\Psi(x,t)$$

を解いて，場所$x=0$，時刻tでの粒子の波動関数$\Psi(0,t)$を求めよ。

4.　時刻tにおいて，粒子が場所$x=0$に見出される確率を求めよ。