

平成 22 年 度

大 学 院 入 学 試 験 問 題

物 理 学

午前 9 : 00～11 : 00

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所などがあつた場合には申し出ること。
3. 4 問のうち、任意の 2 問を選んで解答すること。
4. 解答用紙 2 枚が渡される。1 問ごとに必ず 1 枚の解答用紙を使用すること。解答用紙に書ききれないときは、裏面にわたってもよい。
5. 解答用紙上方の指定された箇所に、受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。また、上方にある くさび型マークのうち、記入した問題番号および修士課程と博士課程の区別に相当する箇所を、試験終了後に監督者の指示にしたがい、はさみで正しく切り取ること。したがって、解答用紙 1 枚につき 2 ヶ所切り取ることになる。
6. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係のない記号、符号などを記入した答案は無効とする。
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.
------	-----

上欄に受験番号を記入すること。

第 1 問

図 1.1 のように、2 枚の合同な三角平板を重ね合わせて水平面に鉛直に立て、片方の平板を法線方向に平行移動して、一様な隙間を持つ斜面を作る。一方、偏心軸を持つ円板を考える。偏心軸は円板の法線方向に固定されている。2 枚の三角平板の間にこの円板を平行に差し込み、軸部を斜面に置く。斜面と偏心軸の間に摩擦は働かず、円板は偏心軸以外で三角平板と触れることはない。今、図 1.2 のように水平右方向に x 軸を、鉛直上方に y 軸を取って慣性系 (x, y) を定義する。また、偏心軸 (点 A) に乗って動く座標系 (x', y') を考え、降下方向に x' 軸、斜面の外向き法線方向に y' 軸を取る。三角平板は水平面に固定されている。

一般に円板は偏心軸のまわりに振れながら斜面に沿って落下するが、落下中の円板が座標系 (x', y') において静止している特別な状態を考える。偏心軸の直径と質量が円板のそれらに比べて小さく無視することができるとき、次の問いに答えよ。但し、水平面と斜面のなす角度を θ ($0 < \theta < \pi/2$)、円板の半径を a 、円板の質量を m 、偏心軸 (点 A) と円板の重心 O の距離を h 、重力加速度を g とする。

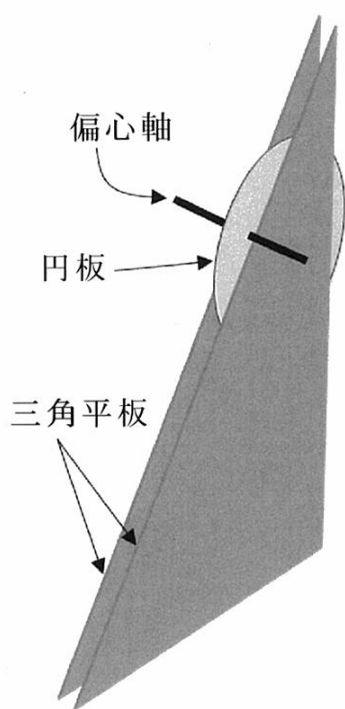


図 1.1

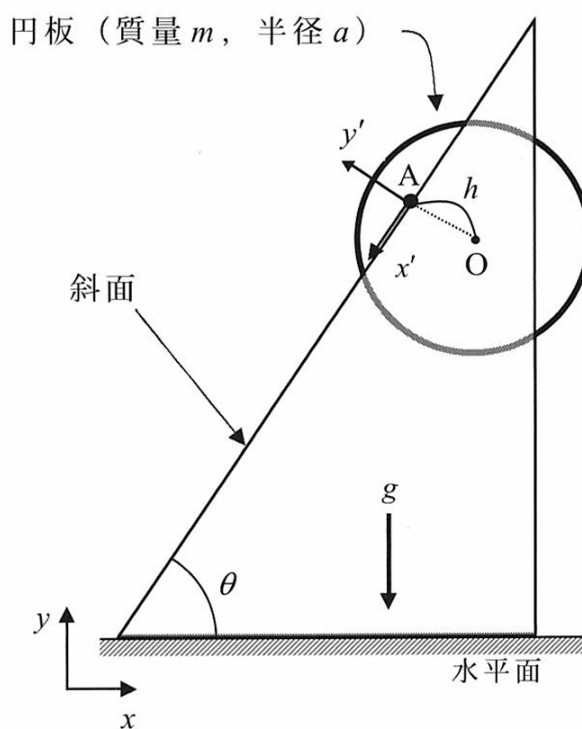


図 1.2

- I. 軸が斜面から受ける抗力の大きさを R として、慣性系 (x, y) における円板の重心 O の x 方向と y 方向の運動方程式を記せ。
- II. 慣性系 (x, y) における点 A の並進加速度 $\mathbf{G}$ の x 成分と y 成分を求めよ。
- III. 点 A に働く抗力の大きさ R を求めよ。
- IV. 点 A を通る軸周りの円板の慣性モーメント I を求めよ。

次に点 A を通る軸周りの円板の微小な振れを考える。

- V. 落下中の円板が座標系 (x', y') において静止している特別な状態からの振れ角を ϕ とするとき、振動の周期 T を求めよ。ただし、この微小振動による点 A の加速度の変化を無視して良い。点 A を通る軸周りの円板の慣性モーメントを I として良い。
- VI. 円板の重心 O と点 A の距離 h が $h = a(1 - \cos\theta)$ で与えられるとき、この周期を最小とする θ を求めよ。

第 2 問

導体内（電気伝導度 σ ，誘電率 ε ，透磁率 μ ）における電磁波の減衰を考える。図 2.1 のように， x 方向に電場（ E_x ）を， y 方向に磁場（ H_y ）をもち， z 方向に伝搬している平面電磁波（角周波数 ω ，時間 t ）が，真空中から導体表面（無限に広い平面， $z=0$ ）に垂直入射している。次に示すマクスウェルの方程式（磁場 $\mathbf{H}$ ，電場 $\mathbf{E}$ ，電流密度 $\mathbf{J}$ ，電束密度 $\mathbf{D}$ ，磁束密度 $\mathbf{B}$ ）を用いて，導体内部（ $z>0$ ）における電磁波に関する以下の問いに答えよ。なお， σ ， ε および μ は， ω に依存せず一定（実数）であるとする。また， i を虚数単位とする。

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2)$$

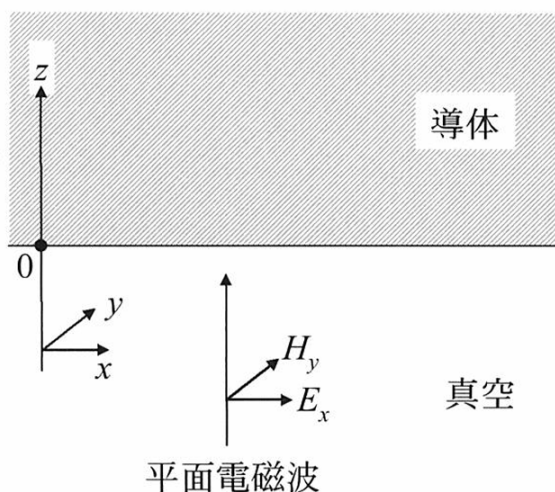


図 2.1

I. E_x と H_y の関係を示す方程式を 2 つ導け。

II. $E_x = E(z) e^{i\omega t}$ ， $H_y = H(z) e^{i\omega t}$ とおくと， $E(z)$ および $H(z)$ の方程式は，

$$\frac{\partial^2 E(z)}{\partial z^2} = (-\varepsilon\mu\omega^2 + i\mu\sigma\omega)E(z) \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 H(z)}{\partial z^2} = (-\varepsilon\mu\omega^2 + i\mu\sigma\omega)H(z) \quad (4)$$

で示される。これらの方程式を，それぞれ $\partial^2 E(z)/\partial z^2 = p^2 E(z)$ および $\partial^2 H(z)/\partial z^2 = p^2 H(z)$ とする。ここで， $p = \alpha + i\beta$ であり， α および β は，

$$\alpha = \omega \left[\frac{\varepsilon\mu}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \right)^2} - 1 \right) \right]^{1/2} \quad (5)$$

$$\beta = \omega \left[\frac{\varepsilon\mu}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \right)^2} + 1 \right) \right]^{1/2} \quad (6)$$

で示される。 $E(z) = E_0 e^{-pz}$ として、以下の問に答えよ。ここで、 E_0 は定数（実数）である。

1. E_x を E_0 、 α 、 β などを用いて示せ。
2. E_x と H_y の位相差を γ として、 H_y を E_0 、 α 、 β 、 γ などを用いて示せ。また、 γ を求めよ。

III. 問 II の結果を用いて、磁場エネルギー(U_H)と電場エネルギー(U_E)の比(U_H/U_E)を、 σ 、 ε および ω を用いて示せ。また、真空中と良導体中($\sigma/\varepsilon\omega \gg 1$)における U_H/U_E の差異について、100字程度で説明せよ。

IV. $l = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}}$ として、良導体($\sigma/\varepsilon\omega \gg 1$)における $E(z)$ の近似式を、 E_0 、 l 、 z などを用いて示せ。また、この良導体における $H(z)$ の近似式を、 E_0 、 σ 、 l 、 z などを用いて示せ。さらに、 $E(z)$ の実数部が z/l の増加に伴いどのように変化するか、概形を示すグラフを描け。

V. $\sigma/\varepsilon\omega \ll 1$ の条件を満たす物質における $E(z)$ の近似式を、 E_0 、 σ 、 μ 、 ε 、 ω 、 z などを用いて示せ。また、この物質における $H(z)$ の近似式を、 E_0 、 σ 、 μ 、 ε 、 ω 、 z などを用いて示せ。さらに、 $E(z)$ の実数部が z の増加に伴いどのように変化するか、概形を示すグラフを描け。

第 3 問

ジュール - トムソン効果による気体の冷却を考える。

- I. 図 3.1 のように、断熱容器中に細孔を持つ栓（細孔栓）が固定されている。はじめに細孔栓の左側の領域 1 において、 $n \text{ mol}$ の気体が体積 V_1 を占めている。領域 1 の左側からピストン 1 により圧力 P_1 がかかっている。細孔栓の右側の領域 2 ではピストン 2 により圧力 P_2 がかかっている。 $P_1 > P_2$ の時に、気体は細孔栓をとおして徐々に領域 1 から領域 2 へ流れ、最終的に図 3.2 のように領域 2 で体積 V_2 を占めた。この過程は等エンタルピー過程であることを示せ。
- II. エンタルピー H が一定の場合、圧力 P が減少するとエントロピー S が増大することを示せ。

ジュール - トムソン係数 μ_{JT} は、

$$\mu_{JT} = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_H = \frac{1}{C_p} \left\{ T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P - V \right\} \quad (1)$$

と表わされる。ただし T は絶対温度であり、 V は体積、 C_p は定圧比熱である。以下の設問に答えよ。

- III. 理想気体のジュール - トムソン係数がゼロであることを示せ。さらにその理由を理想気体の性質から説明せよ。
- IV. 状態方程式が $\left\{ P + \frac{an^2}{TV^2} \right\} (V - nb) = nRT$ (Berthelot の状態方程式) に従う非理想気体のジュール - トムソン係数を考える。 a と b は気体に依存する定数である。 R は気体定数である。

1. $(\partial P / \partial T)_V$ と $(\partial P / \partial V)_T$ を求めよ。
2. ジュール - トムソン係数が

$$\mu_{JT} \approx \frac{n}{C_p} \left(\frac{3a}{RT^2} - b \right) \quad (2)$$

と近似できることを示せ。ただし、希薄な気体の極限として、 $na \ll RT^2V$, $nb \ll V$ と仮定せよ。

V. Berthelot の方程式に従う気体の臨界温度 T_c を求めよ。また、式(2)から得られる、 $\mu_{JT} = 0$ となる反転温度 T_i を、 T_c を用いて表せ。

VI. ジュール - トムソン効果により冷却が起こる温度範囲を、式(2)を使って理由とともに示せ。

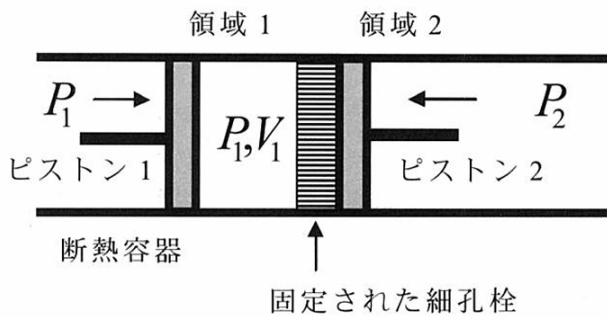


図 3.1

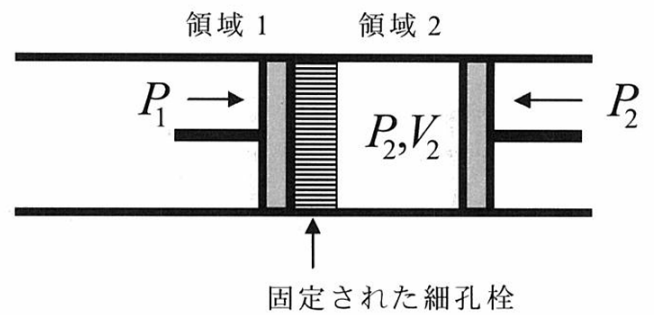


図 3.2

第 4 問

水素原子を考える。電荷 $+e$ の陽子のまわりに、電荷 $-e$ の電子が存在している。陽子と電子の大きさは無限小であるとし、また陽子の質量は電子の質量に比べて十分に大きく、陽子是不動であるとする。陽子の位置を座標の原点にとり、電子の位置を $\mathbf{r} = (x, y, z)$ とし、 $r \equiv |\mathbf{r}|$ とする。また、 $\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったもので、 i を虚数単位とする。

- I. 陽子と電子の間に働くクーロン力の大きさは、 ε_0 を真空の誘電率として、

$$F = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (1)$$

である。電子が陽子から距離 r の位置にあるときのポテンシャルエネルギー V を示せ。ただし $V \rightarrow 0$ ($r \rightarrow \infty$) となっているものとする。

- II. 系が定常状態にある場合の、電子に対する Schrödinger 方程式を示せ。ただし電子の波動関数を ϕ 、電子のエネルギー固有値を E とせよ。

- III. ここで座標系 (x, y, z) を極座標系 (r, θ, ϕ) に、

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (2)$$

と座標変換する。解答用紙に図 4.1 と同じ (x, y, z) 座標系を描き、さらに適当な線と記号を書き入れて、 (r, θ, ϕ) と (x, y, z) の関係を示す図を描け。

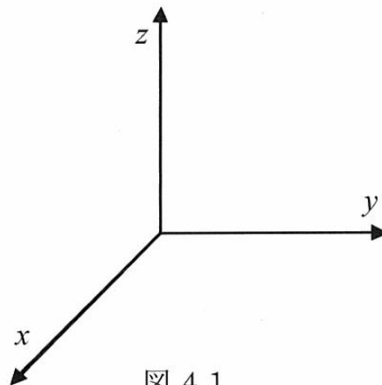


図 4.1

問 II の Schrödinger 方程式を極座標で表したい。極座標系で表された波動関数を $\varphi(r, \theta, \phi)$ とし、これを、

$$\varphi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi) \quad (3)$$

と変数分離してみる。すると、 $Y(\theta, \phi)$ が満たすべき方程式は、

$$\hat{\Lambda}Y(\theta, \phi) = CY(\theta, \phi) \quad (4)$$

となることがわかる。ここで、 C は定数、 $\hat{\Lambda}$ は、

$$\hat{\Lambda} \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (5)$$

で定義された演算子である。式(4)の解として、

$$\hat{\Lambda}Y_l^m(\theta, \phi) = -l(l+1)Y_l^m(\theta, \phi) \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} Y_l^m(\theta, \phi) = imY_l^m(\theta, \phi) \quad (7)$$

を満たすある正規直交関数 $Y_l^m(\theta, \phi)$ が存在することが知られている。

IV. 原点を基準とする角運動量演算子を、

$$\hat{\mathbf{l}} = (\hat{l}_x, \hat{l}_y, \hat{l}_z) \quad (8)$$

とすると、

$$\hat{l}^2 \equiv \hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2 \quad (9)$$

で定義される演算子は、極座標系 (r, θ, ϕ) では、

$$\hat{l}^2 = -\hbar^2 \hat{\Lambda} \quad (10)$$

となることが知られている。上記の波動関数 $\varphi(r, \theta, \phi)$ を持つ電子に対する角運動量の 2 乗和 I^2 の期待値 $\langle I^2 \rangle$ を求めよ。

V. 同じく波動関数 $\varphi(r, \theta, \phi)$ を持つ電子に対する、 $(I^2 - \langle I^2 \rangle)^2$ の期待値を求めよ。

VI. 問 V の結果は、実際に角運動量の 2 乗和 I^2 の測定結果がどのようになることを示しているか。簡潔に説明せよ。

VII. z 軸のまわりの角運動量の演算子 $\hat{I}_z$ を極座標で表すと、

$$\hat{I}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (11)$$

となることが知られている。このとき、 z 軸のまわりの角運動量 I_z の測定値と角運動量の 2 乗和 I^2 の測定値はどのような関連を持つか、簡潔に説明せよ。