平成22年度

大学院入学試験問題

数　　学

午後１：00～３：30

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. ６問のうち，任意の３問を選んで解答すること。
4. 解答用紙３枚が渡される。１問ごとに必ず１枚の解答用紙を使用すること。解答用紙に書ききれないときは，裏面にわたってもよい。
5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。また，上方にある　くさび型マークのうち，記入した問題番号および修士課程と博士課程の区別に相当する箇所を，試験終了後に監督者の指示にしたがい，はさみで正しく切り取ること。したがって，解答用紙１枚につき２ケ所切り取ることになる。
6. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

第 1 問

I. 連立微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, t) \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y, t) \tag{2}$$

を初期条件 $x(t_0) = x_0$，$y(t_0) = y_0$ のもとで数値的に解くことを考える。きざみ幅 h で増加する独立変数 t の値 $t_0, t_1, \ldots, t_i, t_{i+1}, \ldots$ に対応する数値解を $x_0, x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots$ および $y_0, y_1, \ldots, y_i, y_{i+1}, \ldots$ とする。式(1)において，$x(t_i + h)$ を t_i のまわりでテイラー展開して 2 次以上の高次項が無視できるとき，x_{i+1} を $h, x_i, f(x_i, y_i, t_i)$ を用いて表せ。

II. 次に与えられた連立微分方程式について考える。

$$\frac{dx}{dt} = x\left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right) - y \tag{3}$$

$$\frac{dy}{dt} = x + y\left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right) \tag{4}$$

式(3)について，I で得られた x_{i+1} を求める近似式を用い，初期条件 $x(0) = 2$，$y(0) = 0$ のもとで，$h = 0.1$ および $h = 0.5$ の場合の x_1 の値をそれぞれ求めよ。また，きざみ幅 h が大きいほど，誤差が大きくなることを確認せよ。なお，対応する解析解の小数点以下 2 桁までを示すと $x(0.1) = 1.82$ および $x(0.5) = 1.26$ である。

III. 連立微分方程式(3)，(4)について，$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ として変数変換をおこない，r と θ についての連立微分方程式を導け。

IV. $t = 0$ において $r = r_0$ $(r_0 > 0)$，$\theta = 0$ という条件の下で，III で求めた連立微分方程式を解け。

V. 連立微分方程式(3)，(4)の解を xy 平面上で描いた曲線について，$t \geq 0$ における xy 平面上での概形を i) $0 < r_0 < 1$ および ii) $r_0 > 1$ の場合についてそれぞれ描け。

第 2 問

次の微分方程式

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{p} \tag{1}$$

について以下の問いに答えよ。ただし，$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{bmatrix}$とする。

I. 行列$\boldsymbol{A}$のすべての固有値と，それぞれに対応するノルム 1 の固有ベクトルを，複素数の範囲で求めよ。

II. 行列$\boldsymbol{A}$のノルム 1 の固有ベクトルのうち，全ての成分が実数となる実ベクトルであるものを$\boldsymbol{u}_1$とする。ベクトル$\boldsymbol{u}_1$と正規直交基底をなす 2 つの実ベクトルを$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$とし，これら 3 つのベクトルを並べて得られる 3 次の正方行列を$\boldsymbol{T} = [\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \boldsymbol{u}_3]$とする。行列$\boldsymbol{T}$を 1 つ求めよ。

III. ベクトル$\boldsymbol{q}$を$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{p}$と定義すると，$\boldsymbol{q}$は次の形の微分方程式

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{q} \tag{2}$$

を満たす。II で求めた行列$\boldsymbol{T}$を用いて，式(2)の行列$\boldsymbol{B}$を求めよ。

IV. $t=0$における$\boldsymbol{q}$の初期値を$\boldsymbol{q}_0$とすると，式(2)の解は，$\boldsymbol{q} = \exp(\boldsymbol{B}t)\boldsymbol{q}_0$と与えられる。III で求めた行列$\boldsymbol{B}$について$\exp(\boldsymbol{B}t)$を求めよ。

任意の正方行列$\boldsymbol{X}$に対し，$\exp(\boldsymbol{X}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\boldsymbol{X}^n$で定義される。

V. xyz 空間内において，ベクトル$\boldsymbol{p}$を位置ベクトルとする点 $\mathrm{P}(X(t), Y(t), Z(t))$を考える。$t=0$における$\boldsymbol{p}$の初期値$\boldsymbol{p}_0$が$\boldsymbol{p}_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$であるとき，点 P はある円柱面上を動く。この円柱面の方程式を求めよ。

第 3 問

I. $I(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}g_n(x)$, $g_n(x)=\dfrac{1}{i(2n+1)\pi-x}$ を考える。ただし，x は実数，i は虚数単位とする。

1. 実関数 $I_k(x)=g_k(x)+g_{-k-1}(x)$ を考える。このグラフの概形を描け。極大値，極小値をとる x を示すこと。ただし，k は正の整数とする。
2. 複素関数 $f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\left(\dfrac{1}{\exp(z)+1}\right)$ を導入すると，複素平面上で適切な積分経路 C を選ぶことによって $I(x)=\int_C f(z)\dfrac{1}{z-x}dz$ と表現できることを示せ。z は複素数とする。
3. 2 の結果を用いて $I(x)$ を求め，このグラフの概形を描け。

II. $J(x)=\lim_{y\to x}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\dfrac{1}{i(2n+1)\pi-x}\times\dfrac{1}{i(2n+1)\pi-y}\right)$ を考える。ただし，x と y は実数である。$J(x)$ を求めてグラフの概形を描け。

第 4 問

次式で表される xy 平面上の曲線 C について，以下の問いに答えよ。

$$4\left(x^2+y^2\right)^2-\left(x^2-y^2\right)=0 \qquad (1)$$

I. 曲線 C 上で y が極大値をとる点の座標を求めよ。

II. 曲線 C の概形を描け。

III. 曲線 C で囲まれた領域の面積を求めよ。

IV. 曲線 C を x 軸の周りに回転して得られる回転体の表面積を求めよ。

V. 曲線 C の全長を求めよ。必要であれば，$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} \cong 1.31$ を用いて計算すること。

第 5 問

関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\exp(-i\omega x)dx \tag{1}$$

で定義すると，フーリエ逆変換は

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\exp(i\omega x)d\omega \tag{2}$$

で与えられる。ただし，i は虚数単位とする。以下の問いに答えよ。

I. ガウス型関数 $f(x)=\exp\left(-\dfrac{x^2}{a^2}\right)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を計算せよ。なお，定積分の値 $\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\alpha x^2)dx=\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}$ を用いてよい。

II. 2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ のたたみ込みは

$$h(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)g(x-y)dy \tag{3}$$

で与えられる。$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ のフーリエ変換をそれぞれ $F(\omega)$，$G(\omega)$，$H(\omega)$ としたとき，次式が成り立つことを証明せよ。

$$H(\omega)=\sqrt{2\pi}\,F(\omega)G(\omega) \tag{4}$$

III. 積分方程式

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{b^2}\right)dy=\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) \tag{5}$$

の解 $f(x)$ を $a>b>0$ の場合について求めよ。

第 6 問

ある連続確率変数 X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ がそれぞれ 0 と 10 であることが分かっている。このとき，得られた観測量から X の値を推定する問題を考える。以下の問いに答えよ。必要があれば関係式(1)，(2)を用いても良い。ただし，$\mathrm{Cov}(X,Y)$ は X と Y の共分散を表し，α，β は任意の定数を表す。

$$V(\alpha X+\beta Y)=\alpha^2 V(X)+\beta^2 V(Y)+2\alpha\beta\,\mathrm{Cov}(X,Y) \tag{1}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y) \tag{2}$$

I. 1つの観測量 Y から X の値を推定する場合を考える。Y は X に誤差 W が加わったもの，すなわち，$Y=X+W$ である。ただし，$E(W)=0$，$V(W)=1$，$E(XW)=0$ であるとする。

1. $E(Y)$ および $V(Y)$ を求めよ。
2. 推定量 Z を，$Z=aY$ という形で求めるとする。a は定数である。このとき，Z と X の差の二乗の期待値 $E\left((Z-X)^2\right)$ が最小になる a の値を求めよ。

II. N 個の観測量 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ から X の値を推定する場合を考える。ここで，$i=1,2,\ldots,N$ に対して，$Y_i=X+W_i$，$E(W_i)=0$，$V(W_i)=1$，$E(XW_i)=0$ であり，$i\neq j$ に対して，$E(W_iW_j)=0$ であるとする。

1. まず，推定量 Z を，$Z=b\sum_{i=1}^{N}Y_i$ という形で求めるとする。b は定数である。このとき，$\varepsilon=E\left((Z-X)^2\right)$ が最小になる b の値と ε の最小値を求めよ。
2. 次に，$i=1,2,\ldots,N$ に対して，観測量 Y_i が得られるごとに推定量 Z_i を，$Z_i=(1-c_i)Z_{i-1}+c_iY_i$ という更新式によって逐次的に求めるとする。このとき，各推定量 Z_i と X の差の二乗の期待値 $\varepsilon_i=E\left((Z_i-X)^2\right)$ を ε_{i-1} と c_i を用いた式で表わせ。ただし，$E(Z_{i-1}W_i)=0$ であることに注意せよ。
3. 前問のとき，各 c_i を，ε_i が最小になるように定めるとする。このとき，c_i および ε_i を，ε_{i-1} を用いて表せ。ただし，$Z_0=0$，$\varepsilon_0=E\left((Z_0-X)^2\right)=10$ とする。